



TITLE:

# log etale cohomologyの双対性(代数的整数論と数論的幾何学)

AUTHOR(S):

Nakayama, Chikara

---

CITATION:

Nakayama, Chikara. log etale cohomologyの双対性(代数的整数論と数論的幾何学). 数理解析研究所講究録 1995, 925: 95-101

ISSUE DATE:

1995-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59805>

RIGHT:

## log etale cohomology の双対性

東京大学D3 中山能力

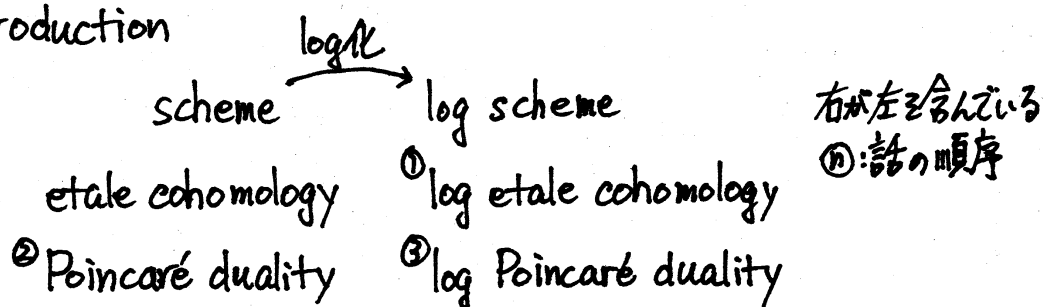
Chikara Nakayama

### "Duality in log etale cohomology"

Throughout this manuscript,  $A$  denotes a (commutative) ring.

$k$  denotes a (commutative) field.

#### 0. Introduction



④ Proofs

⑤ Application

#### 1. The definition of log etale cohomology

Let  $X$  be an fs log scheme (i.e. locally the log str.  $M_X$  of  $X$  has a chart with an fs monoid).

$$P: \text{fs} \leftrightarrow \begin{cases} \text{finitely generated, } P \rightarrow P^{\text{gp}} \text{ is injective (fine)} \\ \forall a \in P^{\text{gp}}, \exists n \in P, n \geq 1 \Rightarrow a \in P \quad (\text{saturated}) \end{cases}$$

Then we define the log etale pretopology  $X_{\text{et}}^{\log}$  of  $X$  as follows:

$$\text{Obj} = \{ Y \rightarrow X \text{ in } (fs)^{(fs|logsch)}, \log \text{ etale and of Kummer type} \}$$

for  $\forall y \mapsto x$

$$(M_Y/\mathcal{O}_Y^*)_{\bar{y}} \leftarrow (M_X/\mathcal{O}_X^*)_{\bar{x}} \text{ is}$$

injective and  $\forall \bar{a} \quad \exists n \geq 1 \quad \bar{a}^n$

$Fl = X$ -morphisms

coverings = surjective families

log etale cohomology は K. Fujiwara により導入され、一般の定義は K. Kato による。従来の etale cohomology 論と並行的にあるために、クヌー型を課する。単に log etale だけでは、例えば全射の base change が全射にならないことがある。などの困難が生ずる。(fs) の base change の underlying scheme は、scheme の圏での base change にならない場合がある。)

Proposition If  $X$  has the trivial log str., i.e.  $M_X = \mathcal{O}_X^*$ ,  
then  $X_{\text{et}}^{\log} = \dot{X}_{\text{et}}$  ( $\dot{X}$  denotes the underlying scheme.)

このように、log etale cohomology は、fs と同じ性質をもつ log scheme に対してのみ定義されるが、trivial log str. は fs なので、従来の場合は含んでいることになる。

## 2. A review of relative Poincaré duality in etale cohomology (SGA4 XVIII §3)

Poincaré duality といえば普通は  $H_c^i$  と  $H^{2d-i}$  が dual ということだが、etale cohomology について証明するとき、relative な定式化が有効であった。

### ① Formal duality

Let  $S$  be a scheme. ( $\rightarrow$  base を固定)

Let  $f: X \rightarrow Y$  be an  $S$ -compactifiable morphism and let  $A$  be a torsion ring.

$f$  が proper なら  $Rf_*$ , open immersion なら  $O_*$  による拡張,  
一般にはその合成で定義

Then  $Rf_*: D(X, A) \rightarrow D(Y, A)$  has a (unique) partial right adjoint

$$Rf^!: D^+(Y, A) \rightarrow D^+(X, A), \text{ and}$$

$$Rf_*^* Rf^! \text{Hom}(K, Rf^! L) \xrightarrow{\sim} Rf^! \text{Hom}(Rf_* K, L), K \in D^-(X, A), L \in D^+(Y, A)$$

これは本質的には圏論の adjoint functor theorem に帰着する形式的な命題である。

② Further assume  $f$  is smooth and the relative dimension  $d$  of  $f$  is pure. Let  $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  where  $n$  is an integer invertible on  $S$ . Then

$$Rf^! L \cong f^* L(d)[2d]$$

Notes. In particular when  $Y = S = k = k_{\text{sep}}$ ,  $L = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[0]$ , and  $K = F[0]$  is locally constant and constructible on  $X_{\text{et}}$ ,

① + ②  $\Rightarrow$  there is a non-degenerate pairing

$$H_c^i(X, F) \times H^{2d-i}(X, \check{F}(d)) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

### 3. Log Poincaré duality

以上を log 化したいが、まず formal duality はそのまま成り立つので問題は

① Formal duality OK.

② Problem Calculate  $Rf^! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  for various  $f$  that is log smooth and compactifiable.

ということになる。では log smooth 射にはどのようなものがあるかという。

Typical examples of log smooth morphisms:

a) toric variety /  $S = (\text{Spec } k, \text{trivial log.})$

b) semistable family /  $T = (\text{Spec } R, \text{log str. defined by the closed pt})$   
 $\uparrow$   
 $\text{dvr}$

このように、singularityのある対象が適当な log str. を与えることで、log smooth になるというところが、 $\log$  scheme 導入の動機であった。結果を述べる。

Thm. 1. Let  $S$  be as above and let  $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  where  $n$  is an integer invertible on  $S$ . Let  $f: Y \rightarrow X$  be a log smooth  $S$ -compactifiable morphism in  $(fs)/S$  with  $Y$  and  $X$  connected  $\neq \emptyset$ . Let  $d = \dim Y - \dim X$ .

Assume (a)  $X$  is log smooth and compactifiable over  $S$

or (b)  $X$  is compactifiable over  $S$  and is étale locally the log locus of an  $X'$  that is log smooth over  $S$ .  $\text{Supp}(M_{X'}^{\#}/\mathcal{O}_{X'}^*)$

Then

$$Rf^! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = j_! \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(d)[2d]$$

where  $j: Y_{\text{vert}}/S \hookrightarrow Y$  is the open immersion from  
 $\{y \in Y \mid f \text{ is vertical at } y \text{ i.e. } \forall a \in M_{Y, \bar{y}} \exists b \in M_{X, f(\bar{y})} \text{ s.t. } a|b \text{ in } M_{Y, \bar{y}}\}$  //

For simplicity  $\boxed{\wedge := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  in the following. ← 本稿の最後まで

Example 1 (a) Assume  $X=S$ . Then  $Y_{\text{vert}}/S \hookrightarrow Y$  is a toroidal

embedding.

普通の etale cohomology では, toric variety の双対複体は複雑だが, log では, 単に, torus からの 0 による拡張となっている, ということ。

(b) Let  $f: Y \rightarrow X$  be the special fiber of a  

$$\begin{array}{c} \parallel \\ T \otimes_{\mathbb{R}} k \end{array}$$
 semistable family.

Then  $X$  satisfies (b) and  $Y_{\text{ver}/f} = Y$ , so  
 $Rf^! \wedge = \wedge(d)[2d]$  where  $d = \dim Y$ .

普通の smooth の場合と全く並行的である。実際に族から来ていなくても, 局所的にどうなっているだけでもよい。

Remark For a certain  $f$  which does not satisfy (a) nor (b),  
 $Rf^! \wedge \neq j_! \wedge(d)[2d]$ .

一般にはどうなるかは, 今の所予想することも難しい。

Thm 2. (d.v.r. base) Let  $T$  be as above and let  $\eta$  be its generic point. Let  $n$  be an integer invertible on  $T$ . Let  $f: Y \rightarrow X$  be a log smooth  $T$ -compactifiable morphism in  $(\text{fs})/T$  with  $Y$  and  $X$  connected  $\neq \emptyset$ . Assume that  $f$  is vertical. Let  $d = \dim(Y_\eta) - \dim(X_\eta)$ . Assume  $X$  is log smooth and compactifiable over  $T$ .

Then the same conclusion as in Thm. 1. holds.

Example 2. Let  $f: Y \rightarrow X = T$  be a semistable family. Then Thm 2.

can be applied to  $f$ .

#### 4. Proofs

Thm1.(a) reduces to the case where  $X = S = k = k_{\text{sep}}$  and  $Y = \text{Spec}(k[t_1, \dots, t_d])$  with log str. associated to  $\mathbb{N} \ni 1 \mapsto t_1$ .

Consider

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{trivial log } \textcircled{Y_{\text{ver}}} & \xrightarrow{j} & Y & \xleftarrow{i} & Y \cdot Y_{\text{ver}} =: Z \\
 & \searrow u & \downarrow f & & \downarrow \varepsilon: \text{forgetting log morphism} \\
 & & k & \xleftarrow{z^c} & Z^c = (\dot{Y}/(t_1), \text{trivial log})
 \end{array}$$

(Notation: For a log scheme  $X$ ,  $\dot{X}$  denotes the underlying scheme of  $X$  and  $X^c = (\dot{X}, \text{the trivial log str.})$ )

We have  $j^* Rf^! \Lambda = Ru^! \Lambda \cong \Lambda(d)[2d]$  (usual Poincaré duality).

We prove its adjoint  $Rf^! \Lambda \xleftarrow{\mu} j_! \Lambda(d)[2d]$  is an isomorphism.

To see this, it suffices to show  $Rz^! \mu$  is an isomorphism.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Consider } Rz^! j_! \Lambda(d)[2d] & \xleftarrow{\partial} & Rz^! z_* \Lambda(d)[2d-1] = \Lambda(d)[2d-1] \\
 \downarrow Rz^! \mu & & \downarrow \downarrow \\
 Rz^! Rf^! \Lambda & = & R\varepsilon^! Rz^c! \Lambda \cong R\varepsilon^! \Lambda(d-1)[2d-2] \\
 & & \text{usual P.d. for } \dot{Z}
 \end{array}$$

where  $\partial$  is an isomorphism by (usual) relative purity and the right vertical arrow is an isomorphism induced by a Galois theory on the constant log scheme  $Z$ :

$$\left\{ \text{Module on } Z_{\text{et}}^{\log} \right\} \approx \left\{ \text{Module on } \dot{Z}_{\text{et}} \text{ on which } \hat{\mathbb{Z}}(1) = \varprojlim_{(m, \text{ch} k)=1} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}(1) \text{ acts continuously} \right\}$$

この図式の可換性の証明は難しいが、実は formal duality を利用した論法があって可換性を示すことなしに、 $\mu$  の同型をいうことができる。

Thm 1(b) is reduced to (a). Thm 2 is formally induced from Thm 1 and purity for log smooth families over d.v.r.

5. An application of Thm 1(a).

Prop. Let  $\Delta$  be a finite simplicial fan of dim.  $r$  and let  $k$  be a field. Let  $n$  be an integer prime to  $\text{ch}(k)$  and to  $N_\Delta$  (an integer determined by  $\Delta$ ).

Then  $R(X_\Delta \rightarrow k)^! \wedge \cong \wedge(r)[2r]$  on  $(X_\Delta)_{\text{et}}$ .

$$\wedge = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

the toric variety associated to  $\Delta$

(Note that this statement concerns the usual étale cohomology (not log).)

文献について: log scheme の基本的なことについては 論文集 Algebraic analysis, geometry, and number theory, Johns Hopkins University Press, 1989 の中の K. Kato の論文 (pp. 191-224) をはじめ、いくつかの文献が出版されている。しかし §1.3-5 の内容が書かれた文献は今の所 (1995年4月現在) preprint の段階である。